有限可解群の表現について

福　島　　博
群馬大学教育学部数学教室
（2011 年 9 月 28 日受理）

Representations of finite solvable groups

Hiroshi FUKUSHIMA
Department of Mathematics, Faculty of Education, Gunma University
Maebashi, Gunma 371-8510, Japan
(Accepted on September 28th, 2011)

概要
可解群 G のある２つの忠実な既約指標の積がまた既約指標となることがあれば G は巡回群であることが、グリーンの定理の一般化である予想 C のもとで成り立つことを証明する。

1　序

α,β を有限群 G の既約指標とする。このとき積 $\alpha\beta$ が既約指標になることがあるのだろうか？まず考えられるのが α と β がともに１次指標の場合である。この場合は $\alpha\beta$ も１次指標となり既約となる。次に π を素数の集合として, G の既約指標 α と β がそれぞれ π-special, π'-specia([1] 参照) ならば $\alpha\beta$ は既約指標になるという Gajendragadkar の定理 ([1]) がある。このように既約指標の積がまた既約指標になるということは,　よくあるとまではいえないがそれ程珍しいことではない。しかし, このとき $O_\pi(G)$ は Ker β に含まれ, $O_{\pi'}(G)$ は Ker α に含まれる。可解群 G においては $O_\pi(G)$,$O_{\pi'}(G)$ のいずれかは 1 ではないから α と β のいずれかは忠実な指標ではない。また α と β がともに１次指標の場合も G が巡回群でなければ α と β は忠実な指標ではない。そこで α と β が G の忠実な既約指標のとき, 積 $\alpha\beta$ が G の既約指標 (必ずしも忠実でなくてよい) となることがあるのだろうか？ という問題が考えられる。

このような２つの既約指標 $\alpha,\beta(\alpha=\beta$ を含む) をもつ群 (以下本論文では $(*)-$ 群とよぶ) の例としては, 巡回群, SL(2,5), 交代群 A_n(n は 9 以上の平方数) が知られている。

Isaacs は論文 [2] において $(*)-$ 群の研究を行い, その中で次のような予想をした。

予想 A：可解な $(*)-$ 群は巡回群に限る。

また彼は論文の中で, 次の予想 B が正しければ予想 A が正しいことを証明した。

予想 B：F を体 G を有限群,V を既約 FG 加群とし, $G=XY$ (X,Y は G の部分群) で X,Y がそれぞれ V の中に 0 以外の固定点をもてば, G は V に自明に作用する。

予想 B に関して, 本論文では, グリーンの定理の一般化である次の予想 C を提出する。

予想 C : N を有限可解群 G の正規部分群として V を FG 既約加群とする。ここで, 体 F は代数閉体で標数は $p>0$ でも 0 でもよい。
$V|_N = W_1 + \cdots + W_k$, ここで $W_1, \cdots, W_k$ は isomorphic N 既約加群とする。
このとき $v \neq 0$ で $G = C_G(v)N$ となる $v \in V$ が存在するなら $k=1$ となる。

ここでグリーンの定理とは次の定理である。

グリーンの定理 N を有限可解群 G の正規部分群として V を FG 既約加群とする。ここで, 体 F は代数閉体で標数は $p>0$
$V|_N = W_1 + \cdots + W_k$, ここで $W_1, \cdots, W_k$ は isomorphic N 既約加群とする。このとき G/N が p-群なら $k=1$ となる。

G の p-シロー群を P とすると, G/N が p-群であるから $G=PN$. F の標数が $p>0$ であるから, $C_V(P) \neq 0$. $0 \neq v \in C_V(P)$ とすると $C_G(v) \supseteq P$ ゆえに $G = C_G(v)N$ となり予想 C の仮定が満たされる。よって予想 C が成り立てばグリーンの定理が成り立つ。

本論文で次が成り立つことを証明する。

主定理
F を標数 $p>0$ の体, G を有限可解群とし, 予想 C が成り立つとする。このとき V を既約 FG 加群とし, $G=XY$ (X, Y は G の部分群) で X, Y がそれぞれ V の中に 0 以外の固定点をもてば, G は V に自明に作用する。

2 主定理の証明

主定理の証明に用いる次の補題を証明する。
補題 1
X, Y は群 G の部分群で $X \neq G \neq Y$ とする。$G = XY = XM = YM$, M は G の極小正規部分群で elementary abelian q 部分群 (q は素数) とする。このとき, $X \cap M = 1$ かつ $C_X(M) \neq 1$ となる。

[証明] $X \neq G \neq Y$ と M の極小性から $X \cap M = 1$ かつ $Y \cap M = 1$. $C_X(M) = 1$ とする。$O_q(X) \neq 1$ とすると, $C_M(O_q(X)) \neq 1$, M の極小性から $C_M(O_q(X)) = M$. よって $1 \neq O_q(X) \subseteq C_X(M)$ となり矛盾。よって $O_q(X) = 1$. ゆえに $O_{q'}(X) \neq 1$. $N = O_{q'}(X)M$ とおくと $O_{q'}(X)$ は共役をとると Y に含まれるから $O_{q'}(X)^{xy} \subseteq Y, x \in X, y \in Y$ よって $O_{q'}(X) \subseteq Y$ $N \lhd G$. $N \cap Y = O_{q'}(X)M \cap Y = O_{q'}(X)(M \cap Y) = O_{p'}(X) \lhd Y$. よって

$O_{p'}(X) \triangleleft G = XY$. このとき $1 \neq O_{p'}(X) \subseteq C_X(M)$. 矛盾。ゆえに $C_X(M) \neq 1$ となる。

[主定理の証明]

G を定理の最小位数の反例とする。さらに $0 \neq a \in C_V(X)$, $0 \neq b \in C_V(Y)$, とする。

Step 1. G の正規部分群 N を $XN \subsetneq G$ または $YN \subsetneq G$ を満たす最大の正規部分群とすると $XN = G$ または $YN = G$ となる。よって $XN \subsetneq G$, $YN = G$ としてよい。

[証明] $G = XG = YG$ かつ $G \supsetneq X, G \supsetneq Y$ より上記の条件を満たす N は存在する。$N \neq G$ より $N \subsetneq M \triangleleft G$ で $N \triangleleft M$ が G の主組成列となるものが存在する。N の取り方より $XM = YM = G$. $\overline{G} = G/N$ とおくと $\overline{G} = \overline{XY} \triangleright \overline{M}$. $\overline{M}$ は elementary abelian q 部分群 (q は素数) でかつ極小正規部分群。もし $\overline{X} \subsetneq \overline{G}$ かつ $\overline{Y} \subsetneq \overline{G}$ とすると補題1より $1 \neq C_{\overline{X}}(\overline{M}) \triangleleft \overline{G}$. L を $C_{\overline{X}}(\overline{M})$ の G への逆像とすると, $N \subseteq L \triangleleft G$. N の最大性より $XL = YL = G$. とくに $\overline{G} = \overline{XL}$. よって $\overline{G} = \overline{X}$ となり矛盾。ゆえに $\overline{G} = \overline{X}$ または $\overline{G} = \overline{Y}$. すなわち $G = XN$ または $G = YN$.

Step 2. $V_N = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$, V_i は homogeneous $N-$module
$a = a_1 + \cdots + a_n$, $b = b_1 + \cdots + b_n$ $(a_i, b_i \in V_i)$ としたとき $a_1 \neq 0 \neq b_1$.

[証明] $a_i \neq 0 \neq b_j$ とする。 このとき $G = XY$ より $V_i^{xy} = V_j, x \in X, y \in Y$. よって $V_i^x = V_j^{y^{-1}} = V_k$, $1 \leq k \leq n$. よって $0 \neq a_i^x = a_k$ かつ $0 \neq {b_j}^{y^{-1}} = b_k$. ゆえに $a_1 \neq 0 \neq b_1$ としてよい。

Step 3. 矛盾.

[証明] $V_1 = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$, ここで $W_i (1 \leq i \leq k)$ は同型な既約 $N-$module. $T = I_G(W_1)$ (W_1 の惰性群) とおくと, $T = N(T \cap Y)$. さらに T は V_1 に既約に作用する。このとき $T \cap Y$ は $b_1 \neq 0$ を固定するので, $T = NC_T(b_1)$. 予想 C を仮定すると $k = 1$ となる。ゆえに $V_1 = W_1$. $T_0 = I_{XN}(W_1)$ とおくと $(V_1)_{T_0}$ は既約。このとき $T_0 \cap X$ と $T_0 \cap Y$ はそれぞれ a_1, b_1 を固定する。

$U = V_1 \otimes_{T_0} XN$ とおくと U は既約 XN-module. $G_0 = XN$ とおくと $X \subseteq G_0$ より $G_0 = (XY) \cap G_0 = X(Y \cap G_0)$. $Y_0 = Y \cap G_0$ とおくと $G_0 = XY_0$. $XN = T_0 X = T_0(Y \cap XN) = T_0 Y_0$, $XN = T_0 x_1 + \cdots + T_0 x_r = T_0 y_1 + \cdots + T_0 y_r$, ここで $x_i \in X, y_i \in Y_0 (1 \leq i \leq r)$.

$$a_0 = a_1 \otimes x_1 + \cdots + a_1 \otimes x_r, \qquad b_0 = b_1 \otimes y_1 + \cdots + b_1 \otimes y_r$$

とおくと X, Y_0 は, それぞれ a_0, b_0 を固定する。$G_0 \subsetneq G$ で G_0 も定理の条件を満たすから G_0 は U に自明に作用する。特に N は V_1 に自明に作用するから V に自明に作用する。G の最小性により $N = 1$ となり $Y = G$. よって G は V に自明に作用することになり矛盾。

参考文献

[1] D. Gajendragadkar, A characteristic class of characters of finite π-separable groups, J. Algebra 59(1979), 237–259.

[2] I. M. Isaacs, Irreducible products of characters, J. Algebra 223(2000), 630–646.