Science Reports of Faculty of Education, Gunma University, Vol. 44, pp. 5－21, 1995

数体系のシナリオ

（自然数の公理から有理数まで）

大　竹　公一郎
群馬大学教育学部数学教室
（1995年9月8日受理）

On the construction of numbers

Koichiro OHTAKE
Department of Mathematics, Faculty of Education, Gunma University
Maebashi, Gunma 371, Japan
(Accepted September 8, 1995)

Abstract

I am interested in Mathematics education. In this paper I will construct the system of numbers for the sake of elementary and junior high school teachers. Why do I do this? I wrote the reason below in Japanese. We will begin with the axiom of the natural numbers. Our axiom is different from Peano's one. Binary operations (addition and multiplication) will be defined in order to relate our life. We will finish by constructing rational numbers.

1．序　　論

数体系は自然数から出発して整数，有理数，実数，複素数と構成して行くのが普通であるが，理論的に構成する数体系は，自然数のペアノの公理から出発し，現実的な意味付けは殆ど意識せずになされる。一方小・中学校での数指導は，自然や実生活との関わりを意識して進められる。ところが，たとえば，分数を指導する場合，始めから分数が存在しているのか，分数を構成しているのかあいまいである。自然数の足し算にしても「2個と3個で5個なので，2＋3＝5」というのは，定義なのか，足し算の定義に基づいた結果なのか全くはっきりしていない。あたかも実験結果を根拠として四則演算を正当化しようとしているとさえ見ることができる。

小・中学校で扱う数体系は，誤魔化しであると考える人もいる。私はそう思っていたときもあった。一方，教育現場からは，子供たちに対しては，子供たちの理解力にあった指導をすべきなのだから，ペアノの公理云々はナンセンスだという声が聞こえるようだ。さらに，大学で教える数学は，現場では何の役にも立たないという声まで聞こえてくる。子供たちには数学そのものを教えるより

も，数理的な考えを身につけさせること，数理に感心を持たせることであった。

子供たちの立場は了解した。それでは，教師の立場はどうなのだろう。算数，数学の指導の目的を達成するためには，大学で学ぶ数学は不必要なのであろうか。かつて数学教育の現代化という動きがあり，小学校にも取入れられたことがあった。現代化の時代は1968年より1978年の約10年間であると言われている。私は現代化は失敗したと思っている。失敗した理由は教師に教えるだけの力がなかったからであると私は考えている。それで，数学を教えるというよりも，数学的な考え方を身につけさせるという大義が大手を振るうようになったのだと私は思っている。私は，現代化に失敗したとき，数学教育と数学とは決別したと考えている。しかしそれでよいとは思っていない。今の状態を是認するなら，大学において，小・中学校の教師を目指す学生に専門数学を教える必要はないと考えて当然かもしれない。しかし，数学を教えるのに専門数学を知らなくてもよいとか，また，専門数学は教育現場では役に立たないという事態は正常であるとは思われない。

現在の算数・数学教育の目的を肯定するとしても，本当に大学での数学は現場では役に立たないのであろうか。嫌味をいわせてもらうなら，大学での数学が現場で役に立つか立たないか云々できるほど，役に立たないなどと言う人は数学を理解していないのではないだろうか。剰余群を理解して卒業していった学生は何人いただろうか。ガロアの理論を理解するなどは全く望めない話である。大学の数学は現場で役に立たないなどというからにはもっと数学を理解してから言ってもらいたいものである。

数学教育の現代化はもう望めないのか。現代化が復活すれば数学と数学教育との関係は復活すると考えたい。しかし，現状でも教師が専門数学を知っているべきであるという理屈はつく。

「深い専門的知識がなければ，よい数学の授業はできない」という命題は正しいと考える。現実には授業論・教材論の方が大切だと考えるかもしれない。しかし，授業中子供たちが発言する内容が，重要であるとかないとかということを判断することが実は非常に重要であり，その判断できる根拠が教師の数学的知識および能力から来ると言えるのではないか。

一方，数体系については専門数学の方も反省すべきであると考える。数を構成する上で，理論ばかりを優先させてしまっている。小・中学校の教師にとって，この様な構成は役には立たない。これが唯一の正しい構成方法だと思っている人は，小・中学校で扱う数体系は誤魔化しだと思ってしまう。私は，数体系の構成をもっと現実的にしたものを提案したい。この論文を書く目的はまさにそれである。実数や複素数は時間の関係で今までの体系に手を加えることはできなかったが，自然数の加法から有理数の四則演算までは，現実を意識して構成した（有理数の位相的性質から実数，複素数までは，教育的なアイデアができたら書くつもりである）。小学校で足し算を説明するとき，それはまさに自然数の加法の定義であるという立場を取った。自然数に於ける演算は定義も性質も受入れやすいものであるが，問題は有理数の定義である。数学を理解しない大学生の多くは，同値関係による類別で躓くからである。有理数の１つ１つは同値類であると考える以外には，よい方法は思いつかない。さらに，有理数の掛け算も意味が深い。具体的なことは各節を見ていただきたい。

最後に，この論文を書く目的からは多少離れてしまうが，自然数の公理も見直した。ペアノの公理の中の帰納法の原理が，私自身公理として受入れがたかったからである。我々は，選択公理をつねに仮定している。従って，整列可能定理も仮定してよい。この様なバックグラウンドでペアノの公理を考える場合，公理として，自然数全体は整列集合であると宣言しているようなものである。我々はこの点について吟味をし，有限集合の定義をやり直して，自然数の公理を作り直した。ここでは，帰納法の原理は定理として証明される。幾つかの条件，たとえば，A，B，Cがあったとき，「A，B，C」→「A，B」は明らかであるが，逆は必ずしも明らかでないし，成り立つとも言えない。ペアノの公理が「A，B，C」であるとすれば，ここでの公理は「A，B」に相当する。

2．自然数の公理

集合及びその理論については［1］を参照されたい。理論の進め方が［1］と異なるので，本題と深くかかわることは証明する。単射，全射，全単射の定義は既知とする。2つの集合S，Tが対等であるとは，SとTの間に全単射が少なくとも1つ存在するときをいう。SとTとが対等であるときS～Tと表す。

定義1　集合Sが有限集合であるとは，Sのどんな真部分集合もSと対等にはならないときを言う。

定理2．1　有限集合の部分集合は有限集合である。

（証明）　Sを有限集合とし，Tを部分集合とする。Tの真部分集合UがTと対等であるとし，$f: T \to U$を全単射とする。$g: S \to U \cup (S \setminus T)$を

$$g(x) = \begin{cases} x & if\ x \in S \setminus T \\ f(x) & if\ x \in T \end{cases}$$

と定義する。gが全単射であることは容易に確かめられる。$\emptyset \neq T \setminus U$，$T \setminus U \not\subseteq U$も$T \setminus U \not\subseteq S \setminus T$も明かだから，$T \setminus U \not\subseteq U \cup (S \setminus T)$である。よって$U \cup (S \setminus T)$は$S$の真部分集合である。これは$S$が有限集合であることに反する。□

ここで自然数の公理を述べる。$(\mathbb{N}, \leq)$は順序集合であり次の4つの条件を満たすとする。

N1．$(\mathbb{N}, \leq)$は全順序集合である。

N2．$\mathbb{N}$の元aで$\forall n \in \mathbb{N}$に対して$a \leq n$を満たすものが存在する。

N3．$\forall n \in \mathbb{N}$に対しnの直後の元が存在する。即ち$n < m$で$n < x < m$を満たす$x \in \mathbb{N}$が存在しないような$m \in \mathbb{N}$が存在する。

N4．$\forall n \in \mathbb{N}$に対して$\{x \in \mathbb{N} \mid x < n\}$は有限集合である。

N 4に付いては後で注意する。

補題2．2　$N2$におけるaは唯1つである。

（証明）　bが$N2$を満たすとする。$b \leq a$である。aも$N2$を満たすので$a \leq b$である。すると$N1$より$a=b$でなければならない。□

$N2$におけるaを$\mathbb{N}$の最小元といい1で表す。

補題2．3　$\forall n \in \mathbb{N}$ に対して$N3$を満たすmは唯1つである。

（証明）　いまℓがmに対して$N3$を満たすとする。$\ell \neq m$とすると，$N1$より$\ell < m$または$m < \ell$である。$\ell < m$とすれば$n < \ell < m$となり，mが$N3$を満たすことに反し，$m < \ell$とすれば$n < m < \ell$となり，ℓが$N3$を満たすことに反する。□

N 3においてnの直後の元をn^*と書く。

N 4についての注意：いま1の後者1^*を2とする。集合$\{x \in \mathbb{N} |\ 1 \leq x < 2\}$を考えると，その真部分集合は $\emptyset$, $\{1\}$ だけであり，これらが全体と対等でないことは公理によるのではなく，当然のことである。それでは$N5$の意味は何かと言うと，どんなnをとっても$\{x \in \mathbb{N} |\ 1 \leq x < n\}$が有限集合であることを保証しているのである。以後$x \in \mathbb{N}$ の後者をx^*と書くことにする。

補題2．4　$m < n \Longleftrightarrow m^* < n^*$

（証明）　$\Rightarrow$）$m^* = n^*$とすると$m < n < n^* = m^*$となりmとm^*との間にnがあることになり$N3$に反する。また$n^* < m^*$とすると$m < n < n^* < m^*$となり，mとm^*の間にn, n^*があることになり，やはり矛盾。

$\Leftarrow$）$m^* < n^*$とする。$n < m$なら$n^* < m^*$で矛盾。$m = n$なら$m^* = n^*$となり矛盾。□

定義2　$n \in \mathbb{N}$ に対し$\{x \in \mathbb{N} |\ 1 \leq x < n\}$を$\mathbb{N}$の$n$による切片といい$\mathbb{N}(n)$で表す。

定理2．5　$1 \leq n \in \mathbb{N}$ならばnはある$\mathbb{N}$の元の直後の元である，即ち$\mathrm{m}^* = n$となる$m \in \mathbb{N}$が存在する。

（証明）　$x \in \mathbb{N}(n)$ に対して，$1 \leq x < n$なので$1 < 1^* \leq x^* < n^*$となり，$x^* \in \mathbb{N}(n^*) \setminus \{1\}$である。よって$\phi(x) = x^*$とすれば写像$\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}(n) \setminus \{1\}$が得られる。補題2．4より$\phi$は単射である。一方 $\psi : \mathbb{N}(n) \to \mathbb{N}(n^*) \setminus \{1\}$を

$$\phi(x) = \begin{cases} n & if\ x = 1 \\ x & if\ x \neq 1 \end{cases}$$

と定義すれば，ψが全単射であることは容易に確かめられる。従って$\mathbb{N}(n)$と$\mathbb{N}(n^*) \setminus \{1\}$は対等である。故に$\phi$は全単射である。$1 < n < n^*$なので$n \in \mathbb{N}(n^*) \setminus \{1\}$だから$n = \phi(m) =$

m^* と書ける。□

定理２．６　空でない有限整列集合は最大元を持つ。

（証明）　$(F, \leq)$ を有限整列集合とする。Fが最大元を持たなければ，任意の $x \in F$ に対してxの直後の元x^*が存在する。すると $* : F \to F$ は単射であるが全射ではない。これはFが有限集合であることに反する。□

系２．７　$(F, \leq)$ が有限整列集合で $a \in F$ が最小元でないならば，aは直前の元 $^*a$を持つ。

（証明）　$T = \{x \in F | \ x < a\}$ とする。Tは空集合ではない。定理２．６よりTは最大元を持つ。それをbとする。$b^* = a$ である。□

系２．８　Wが整列集合で，最小元以外の元が必ず直前の元を持つとすると，Fの元に関する数学的帰納法は正しい。即ち，a_0をWの最小元とし，PをWの元に関する命題で，

(1)　$P(a_0)$ は正しい。

(2)　$a \leq \forall x \leq b$ に対して $P(x)$ が正しく，さらにbが最大元でないなら $P(b^*)$ も正しい。

が成り立つとすると，すべての $x \in W$ に対して $P(x)$ は正しい。

（証明）　$T = \{x \in W | \ P(x)$ は正しくない$\}$ が空でないならば，その最小元をbとする。(2)より $b = ({}^*b)^*$ についてもPは正しい。これは矛盾。□

定理２．９　Fが有限集合ならば $F \sim \mathbb{N}(n)$ となるnが唯１つ存在する。

（証明）　$(F, \leq)$ は有限整列集合であるとしてよい。Fの最小元をa_0とする。$a \in F$ に対して，$F[a] = \{x \in F | \ x \leq a\}$ とする。写像$f : F[a] \to \mathbb{N}$ で次の性質を持つものを考える。

　(*i*)　$f(a_0) = 1$

　(*ii*)　$x < a \Rightarrow f(x^*) = f(x)^*$

このとき (*i*), (*ii*) を満たす写像は存在しても唯１つである。実際$g : F[a] \to \mathbb{N}$ も (*i*), (*ii*) を満たすとする。$F[a]$ はFの部分集合として整列集合である。(*i*) より$f(a_0) = 1 = g(a_0)$ 。今 $b \in F[a]$ で $a_0 \leq \forall x \leq b$ に対して $f(x) = g(x)$ であるとする。もし $b = a$ なら $f = g$ であるから言うことはない。よって $b < a$ とする。すると (*ii*) より $f(b^*) = f(b)^* = g(b)^* = g(b^*)$ 。よって帰納法により $\forall b \in F[a]$, $f(b) = g(b)$ である。故に $f = g$ である。

　さて (*i*), (*ii*) を満たす写像を ϕ_aで表すことにする。$T = \{a \in F | \ \phi_a$が存在$\}$ とおく。$T = F$ ならFの最大元をaとしたとき $F[a] = F$ であり $\phi := \phi_a : F \to \mathbb{N}$ は単射となる。ϕ が単射であることの証明は $x < y \Rightarrow \phi(x) < \phi(y)$ を示せば十分である。Fは有限整列集合なので，xについての帰納法で証明することが出来る。$x = a_0$ なら $\phi(x) = 1$ である。まず $\forall y > a_0$, $\phi(y) > 1$ を示す。$\phi(a_0^*) = \phi(a_0)^* = 1^*$ である。今 $b \in F$, $a_0^* \leq \forall x \leq b \Rightarrow \phi(x) > 1$ とする。特に

$\phi(b) > 1$ である。このとき $\phi(b^*) = \phi(b)^* > 1$。よって $\forall y > a_0$ に対して $\phi(y) > 1$ は成り立つ。今 $a_0 \leq \forall x \leq b$ で $x < y \Rightarrow \phi(x) < \phi(y)$ であるとする。$b = \max F$ なら言うこととなし，ただし $\max F$ はFの最大元を表す。$b \neq \max F$ のとき，$b^* < \forall y$ とする。$b < y$ なので $\phi(b) < \phi(y)$ である。よって $\phi(b)^* \leq \phi(y)$ ではある。今 $\phi(b^*) = \phi(y)$ であるとする。そこで $\phi(b^*) = \phi(y)$，$b^* < y$ となるyのうちで最小のものをy_0とする。すると $y_0 = y_1^*$ と書ける。このとき $b^* \leq y_1$ である。一方，$\phi(b^*) = \phi(y_0) = \phi(y_1^*) = \phi(y_1)^* > \phi(y_1)$ である。ところが，$b < y_1$ だから $\phi(b) < \phi(y_1)$。ゆえに $\phi(b)^* \leq \phi(y_1)$。これは $\phi(y_1) < \phi(b^*)$ に反する。よってy_0は存在せず，$b^* < y$ ならば $\phi(b^*) < \phi(y)$ である。これで ϕ が単射であることが証明された。次に $\phi(a) = n$ としたとき $\phi(F) = \mathbb{N}[n]$ となることを示す。ただし $\mathbb{N}[n] = \{x \in \mathbb{N} | x \leq n\}$ とする。$\phi(F) \subseteq \mathbb{N}[n]$ は殆ど明かである。$m \in \mathbb{N}[n]$ で $m \notin \phi(F)$ とする。$X = \{x \in F | m < \phi(x)\}$ と置く。$\max F = a \in X$ なので $X \neq \emptyset$ である。そこでXの最小元をx_0とする。$a_0 < x_0$だからx_0は直前の元 ${}^*x_0$持つ。${}^*x_0 \notin X$ より $\phi({}^*x_0) < m$（等号はありえない)。ところが $\phi(x_0) = \phi(({}^*x_0)^*) = \phi({}^*x_0)^*$ より $\phi(x_0) < m$ でなければならず，x_0のとり方に反する。よって $\phi(F) = \mathbb{N}[n]$ である。さてここでは $T = F$ の場合を証明したので，実際 $T = F$ となることを示せば証明が終わる。$T \neq F$ と仮定し $F \setminus T$ の最小元をb_0とする。$b_0 \neq 1$ なので ${}^*b_0$がある。ϕ_{b_0} は存在するので $\phi : F_{b_0} \to \mathbb{N}$を

$$\phi(x) = \begin{cases} \phi_{{}^*b_0}(x) & if\ x \leq {}^*b_0 \\ (\phi_{{}^*b_0}({}^*b_0))^* & if\ x = b_0 \end{cases}$$

と定義すれば $\phi = \phi_{b_0}$ である。これは $b_0 \notin T$ に反する。よって $F \setminus T = \emptyset$，即ち $T = F$ でなければならない。□

$F \sim \mathbb{N}(n)$ のとき，$F = \emptyset$ ならばFの元の個数は０，$F \neq \emptyset$ のときFの元の個数は ${}^*n$であるといい，${}^*n = {}^\#F$ で表すことにする。

系２.10　$\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $\mathbb{N}(n)$ は$\mathbb{N}$の部分順序集合として整列集合。

（証明）　定理２.９で証明したように，Fが有限整列集合のとき，Fの最大元aに対し $\phi_a : F \to \mathbb{N}(m)$ ($\phi_a(a) = {}^*m$) は順序同型であった。今 $\mathbb{N}(n)$ に適当な順序を入れ整列集合にしたとき，$\mathbb{N}(n) \sim \mathbb{N}(\ell)$ が順序同型であるような ℓ がある。$\mathbb{N}(n)$ と $\mathbb{N}(\ell)$ の間には包含関係があるので，両者が順序同型で有限集合であるから $n = \ell$ である。よって $\mathbb{N}(n)$ は $\mathbb{N}$ の部分順序集合として整列集合である。□

定理２.11　$\mathbb{N}$は整列集合である。

（証明）　$\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{N}$ をとる。$n \in M$とする。$n \in \mathbb{N} \cap M$ より $\mathbb{N}[n] \cap M$ は整列集合 $\mathbb{N}[n]$ の空でない部分集合なので最小元を持つ。それをa_0とする。a_0がMの最小元であることを示す。m

$\in M$とする。$m > n$なら$a_0 \leq n < m$より$a_0 < m$。$m \leq n$なら$m \in \mathbb{N}[n] \cap M$となり，$a_0$のとり方より$a_0 \leq m$。よって$a_0$は$M$の最小元である。□

3．自然数の加法

次の定理は明かであるが，重要であるので述べておく。

定理３．１　集合A，A'，B，B'が$A \sim A'$，$B \sim B'$，$A \cap B = \emptyset = A' \cap B'$を満たすなら$A \cup B \sim A' \cup B'$が成り立つ。

$\tilde{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{0\}$ とし，$\forall n \in \mathbb{N}$ に対し $0 < n$と定義する。$\tilde{\mathbb{N}}$は整列集合である。$^{\#}\emptyset = 0$ と定める。これからは$\tilde{\mathbb{N}}$の元を自然数と呼ぶことにする。$\tilde{\mathbb{N}}$における加法を定義する。

定義３（加法）m，$n \in \tilde{\mathbb{N}}$のとき集合A，Bを$^{\#}A = m$，$^{\#}B = n$，$A \cap B = \emptyset$となるようにとり，

$$m + n = {}^{\#}(A \cap B)$$

とする。

定理３．１より，$m + n$は集合A，Bのとり方によらない。

定理３．２　自然数ℓ，m，nに対し次が成り立つ。

(1)　$\ell + m = m + \ell$

(2)　$(\ell + m) + n = \ell + (m + n)$

（証明）　(1)は明かである。

(2)　$^{\#}A = \ell$，$^{\#}B = m$，$^{\#}C = n$，$A \cap B = \emptyset$，$(A \cup B) \cap C = \emptyset$ とする。このとき $(A \cup B) \cap C = (A \cap B) \cup (A \cap C) = \emptyset$ より，$A \cap C = \emptyset = B \cap C$。また$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) = \emptyset$。故に$^{\#}(A \cup (B \cup C)) = {}^{\#}A + {}^{\#}(B \cup C) = \ell + (m + n)$。一方$^{\#}((A \cup B) \cup C) = (\ell + m) + n$。$(A \cup B) \cup C) = A \cup (B \cup C)$ が成り立つので(2)が成り立つ。□

次は加法の定義より明か。

定理３．３　任意の自然数nに対し，$0 + n = n$ が成り立つ。

補題３．４　A，Bは有限集合とする。このとき次は同値。

(1)　$^{\#}A < {}^{\#}B$

(2)　AからBへの単射で，その像がBと一致しないものがある。

（証明）　$m = {}^{\#}A$，$n = {}^{\#}B$とすると$A \sim \mathbb{N}[m]$，$B \sim \mathbb{N}[n]$ である。

(1)⇒(2)．$\mathbb{N}[m]$ は $\mathbb{N}[n]$ の真部分集合なので$A \sim \mathbb{N}[m] \hookrightarrow \mathbb{N}[n] \sim B$は単射で，像は$B$と一致

していない。

(2)⇒(1). (2)の条件は，$\mathbb{N}[m]$ から $\mathbb{N}[n]$ への単射があり，像が $\mathbb{N}[m]$ と一致しないと言い換えることが出来る。もともと $\mathbb{N}[m]$ と $\mathbb{N}[n]$ との間には包含関係があるのだから $m<n$ ということになる。□

補題３．５　ℓ，m，$n \in \tilde{\mathbb{N}}$，$m<n$ ならば $\ell+m<\ell+n$.

（証明）${}^{\#}A=\ell$，${}^{\#}B=m$，${}^{\#}C=n$，$B \subset C$，$B \neq C$，$A \cap C=\emptyset$ とする。明かに $A \cup B \subset A \cup C$，$A \cup B \neq A \cup C$. よって $\ell+m<\ell+n$. □

定理３．６　m，n を自然数とし，$m \leq n$ とする。このとき $m+x=n$ となる $x \in \tilde{\mathbb{N}}$ が唯一つ存在する。

（証明）${}^{\#}A=m$，${}^{\#}B=n$ とすると $m \leq n$ より $A \subseteq B$ と仮定してよい。$x={}^{\#}(B \setminus A)$ とすれば $A \cup (B \setminus A)=B$ より $m+x=n$ である。また，解が一意的であることは $m+y=n$ なる $y \in \tilde{\mathbb{N}}$ があったとする，$x<y$ なら補題３．２より $n=m+x<m+y=n$ となり矛盾。$x>y$ としても同様に矛盾。よって $x=y$ でなければならない。□

m，$n \in \tilde{\mathbb{N}}$ に対して $m \leq n$ のとき，演算 $n-m$ を次のように定義する。

定義４（減法）　${}^{\#}A=b$，${}^{\#}B=n$，$A \subseteq B$ とし $n-m:={}^{\#}(B \setminus A)$ とする。

これは *well defined* である。即ち，B，B' を有限集合とし，$A \subset B$，$A' \subseteq B'$，$A \sim A'$，$B \sim B'$ ならば $B \setminus A \sim B' \setminus A'$ が成り立つ。

実際 $B=A \cup (B \setminus A)$ より $n=m+{}^{\#}(B \setminus A)$. また $B'=A' \cup (B' \setminus A')$ より $n=m+{}^{\#}(B' \setminus A')$ であるから定理３．４より ${}^{\#}(B \setminus A)={}^{\#}(B' \setminus A')$ である。

定理３．７　ℓ，m，$n \in \tilde{\mathbb{N}}$ で　$\ell+m \leq n$ のとき，$(n-\ell)-m=n-(\ell+m)$ が成り立つ。

（証明）　$\ell={}^{\#}A$，$m={}^{\#}B$，$n={}^{\#}C$，$A \cap B=\emptyset$　とする。$\ell+m \leq n$ より $A \cup B \subseteq C$ としてよい。$n-(\ell+m)={}^{\#}(C \setminus (A \cup B))$ である。よって $C-A \supseteq B$ かつ $(C \setminus A) \setminus B=C \setminus (A \cup B)$ を示せばよい。$B \subseteq C \setminus A$ は明かである。また「$x \notin A$ かつ $x \notin B$」は $x \notin (A \cup B)$ と同値である。よって

$$
\begin{aligned}
x \in (C \setminus A) \setminus B &\Leftrightarrow x \in C \setminus A \,\&\, x \notin B \\
&\Leftrightarrow x \in C \,\&\, x \notin A \,\&\, x \notin B \\
&\Leftrightarrow x \in C \,\&\, x \notin (A \cup B) \\
&\Leftrightarrow x \in C \setminus (A \cup B)
\end{aligned}
$$

故に $(C \setminus A) \setminus B=C \setminus (A \cup B)$　が成り立つ。□

4．自然数の乗法

定義5（乗法）m, $n \in \tilde{\mathbb{N}}$ に対して，$n=0$ のとき $mn=0$ とする。$n \neq 0$ のとき、${}^{\#}A_i=m$（$i=1, 2, \ldots, n$）で $A_i \cap A_j=\emptyset$（$i \neq j$）なる $A_1, A_2, \ldots, A_n$ をとり，

$$mn={}^{\#}(\cup_{i=1}^{n} A_i)$$

とする。

この定義が *well defined* であることは明かである。

定理4．1　m, $n \in \tilde{\mathbb{N}}$ で ${}^{\#}A=m$, ${}^{\#}B=n$ とすると ${}^{\#}(A \times B)=mn$ が成り立つ。

（証明）　$n=0$ なら $B=\emptyset$ なので $A \times B=\emptyset$。よって ${}^{\#}(A \times B)=0$。また定義より $mn=0$。よって $n=0$ のときは正しい。

$n \geq 1$ のとき，A_i（$i=1, 2, \ldots, n$）を ${}^{\#}A_i=m$, $A_i \cap A_j=\emptyset$（$i \neq j$）とする。mn の定義より ${}^{\#}(\cup_{i=1}^{n} A_i)=mn$. $A \sim A_i$ なので全単射 $g: B \to \mathbb{N}[n]$ も存在する。そこで $h: A \times B \to \cup_{i=1}^{n} A_i$ を $h(a, b)=f_{g(b)}(a)$ とすると，h が全単射であることは容易に確かめられる。□

系4．2　任意の ℓ, m, $n \in \tilde{\mathbb{N}}$ に対して $mn=nm$ が成り立つ。

定理4．3　ℓ, m, $n \in \tilde{\mathbb{N}}$ に対して

$$\ell(m+n)=\ell m+\ell n$$

が成り立つ。

（証明）　${}^{\#}A=\ell$, ${}^{\#}B=m$, ${}^{\#}C=n$, $B \cap C=\emptyset$ とする。このとき $(A \times B) \cap (A \times C)=\emptyset$ は明かである。ゆえに ${}^{\#}((A \times B) \cup (A \times C))={}^{\#}(A \times B)+{}^{\#}(A \times C)=\ell m+\ell n$ が成り立つことになる。□

定理4．4　m, m', $n \in \tilde{\mathbb{N}}$ で $n \neq 0$ のとき $m<m'$ ならば $mn<m'n$.

（証明）　${}^{\#}A=m$, ${}^{\#}A'=m'$, ${}^{\#}B=n$ とする。仮定より全射でない単射 $f: A \to A'$ がある。このとき $\tilde{f}: A \times B \to A' \times B$ を $\tilde{f}(a, b)=(f(a), b)$ とすると $\tilde{f}$ はやはり全射でない単射である。故に ${}^{\#}(A \times B)<{}^{\#}(A' \times B)$ である。よって補題3．1より $mn<m'n$ となる。□

系4．5（簡約律）　m, m', $n \in \tilde{\mathbb{N}}$ で $n \neq 0$ のとき $mn=m'n$ ならば $m=m'$.

5．割り算

補題5．1　m, $n \in \tilde{\mathbb{N}}$ で $m \neq 0$ のとき $mx=n$ をみたす $x \in \tilde{\mathbb{N}}$ は存在しても唯一つである。

（証明） 系４．２と４．５より明らかである。□

定義６（等分除） $m,\ n \in \tilde{\mathbb{N}}$，$m \neq 0$，$^{\#}A = n$，$A = \cup_{i=1}^{m} B_i$，$B_i \cap B_j = \emptyset$，$^{\#}B_i = {}^{\#}B_j$ $(i \neq j)$ であるとき、$^{\#}B_1 = n \div m$ と表し，$n \div m$ をnのmによる等分除という。

この定義は *well defined* である。実際，$n \div m$ が可能なとき，$(n \div m)\ m = n$ であることに注意すると，$(n \div m)\ m = m\ (n \div m)$ であるから，補題５．１より $n \div m$ は一意的に定まる。

定義７（包含除） $m,\ n \in \tilde{\mathbb{N}}$，$m \neq 0$，$^{\#}A = n$ とする。$\wp(A)$ をAの冪集合，$B : \Lambda \to \wp(A)$ を写像とし，$\forall \lambda \in \Lambda$ に対して$B(\lambda) = B_\lambda$ とする。$A = \cup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$，$B_\lambda \cap B_{\lambda'} = \emptyset$，$^{\#}B_\lambda = {}^{\#}B_{\lambda'} = m$ $(\lambda \neq \lambda')$ であるとき $^{\#}\Lambda = n \oslash m$ と表し，$n \oslash m$ をnのmによる包含除という。

この定義が複雑なのは$n = 0$の場合も考えているからである。$n = 0$のときは$A = \emptyset$である。すると $\Lambda = \emptyset$ならば条件をみたす写像が存在する（そのグラフは$\emptyset$である）。よって $0 \oslash m = 0$ となる。$n \geq 1$のときは $m(n \oslash m) = n$ であるから補題５． １より $n \oslash m$ は一意的に定まる。

定理５．２ $m,\ n \in \tilde{\mathbb{N}}$，$m \neq 0$のとき
(1) 等分除$n \div m$が可能 $\Leftrightarrow$ 方程式$xm = n$が$\tilde{\mathbb{N}}$で可解。
(2) 包含除 $n \oslash m$ が可能 $\Leftrightarrow$ 方程式$mx = n$が$\tilde{\mathbb{N}}$で可解。
(3) $n \div m$が可能 $\Leftrightarrow$ $n \oslash m$ が可能。

（証明） (1) $\Rightarrow$ はすでに示した。
$\Leftarrow$) $x = k$を$xm = n$の解とする。乗法kmの定義と等分除$n \div m$の定義より$k = n \div m$である。
(2) $\Rightarrow$ はすでに示した。
$\Leftarrow$) $n = 0$のときは$x = 0$であり，包含除 $0 \oslash m = 0$ であった。$n \neq 0$のときは$mx = n$の解を$x = k$とすると，やはり乗法mkの定義と包含除 $n \oslash m$ の定義より $k = n \oslash m$ である。
(3) 乗法について交換法則（系４．２）が成り立つので，(1)，(2)より明らかである。□

定理５．２よりnのmによる等分除と包含除は結果が一致する。

６．正の有理数の定義

数学教育に関する書物では，分数には幾つかの意味があるように説明されている。$\frac{a}{b}$の代表的な意味は「b等分のものがa個」である。本来数はたくさんの意味を含んでいるが，実は数自体には意味はないということもできる。人によって感じ方は違うかもしれないが，私には分数と言うのと，有理数と言うのとでは感じが違う。分数にはやはり「b等分のものがa個」というイメージがあるが，有理数は，数体系の中の一部と考えてしまう。中学３年の教科書では，分数として表される数を有理数と定義している。これは小数と無理数を意識してのことらしい。結局は分数と有理数は同

じ意味らしい。しかし一般には分数と有理数は異なる。

正の有理数の必要性は2つあると考えられる。1つは上に書いたように「b 等分のものが a 個」のイメージを数として表すということである。もう1つは，自然数において割り算が不完全であったのを，完全化することである。代数的には後者に重点がおかれるので以下の定理6．1が基本的な定義として採用されるのが普通である。ここでは前者のイメージを基本と考えるので出発点が異なる。$\tilde{\mathbb{N}} \times \mathbb{N} \ni (a, b)$ はもの（対象）に対して，b 等分したうちの a 個というように作用すると考えれば，$m \in \mathbb{N}$ のとき (am, bm) は (a, b) と同じ作用と考えられる。そこで

定義8　$\tilde{\mathbb{N}} \times \mathbb{N} \ni (a, b), (c, d)$ のとき $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow \exists m, n \in \mathbb{N}$ such that $am = cn$ & $bm = dn$ とする。

定理6．1　$\tilde{\mathbb{N}} \times \mathbb{N} \ni (a, b), (c, d)$ に対して $(a, b) \sim (c, d)$ であるための必要十分条件は $ad = bc$ である。

（証明）　$\Rightarrow$）$m, n \in \mathbb{N}$ で $am = cn$，$bm = dn$ とすると $admn = bcmn$，$mn = 0$ なので系4．4より $ad = bc$ が成り立つ。

$\Leftarrow$）$ad = bc$ とする。$a = 0$ なら $c = 0$ なので $m = d$，$n = b$ とおけばよい。$a \neq 0$ のとき $m = ad$，$n = ab$ とおくと，$am = aad = abc = cn$，& $bm = bad = dn$. □

定理6．2　$\sim$ は $\tilde{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}$ における同値関係である。

（証明）　(1)　$\forall (a, b) \in \tilde{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}$ に対して $(a, b) \sim (a, b)$ であることは $ab = ba$ であるから定理6．1より明らか。

(2)　$(a, b) \sim (c, d) \Rightarrow (c, d) \sim (a, b)$ であることは $ad = bc \Rightarrow cb = da$ であることからやはり定理6．1より明らか。

(3)　$(a, b) \sim (c, d), (c, d) \sim (e, f) \Rightarrow (a, b) \sim (e, f)$ であること。$ad = bc$，$cf = de$ より $adcf = bcde$。よって $(af)(cd) = (be)(cd)$。$c \neq 0$ ならば $cd \neq 0$ より乗法の簡約律（系4．4）より $af = be$，即ち $(a, b) \sim (e, f)$。$c = 0$ ならば $a = 0$ および $e = 0$ となり，$af = 0 = be$，即ち $(a, b) \sim (e, f)$。よっていずれにしても $(a, b) \sim (e, f)$ が成り立つ。□

定義9　$(a, b) \in \tilde{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}$ に対して (a, b) を含む同値類全体を $\tilde{\mathbb{Q}}^{+}$ と表す。さらに $\mathbb{Q}^{+} = \tilde{\mathbb{Q}}^{+} \setminus \{\frac{0}{1}\}$ とする。

$\mathbb{Q}^{+}$ の元を正の有理数という。

7．$\tilde{\mathbb{Q}}^+$における加法と乗法

まず $\tilde{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}$ における加法から定義する。「b 等分の a 個」と「d 等分の c 個」を加えるということは「bd 等分の ad 個」と「bd 等分の bc 個」を加えるのと同じことと考えている。全く同じという訳ではなくて，同じとみなすということである。

定義10　$(a,\ b)$，$(c,\ d) \in \tilde{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}$ に対して

$$(a,\ b) + (c,\ d) = (ad + bc,\ bd)$$

とする。

定理７．１　§６で定義した $\tilde{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}$ における同値関係～は加法と両立する。即ち $(a,\ b) \sim (a',\ b')$，$(c,\ d) \sim (c',\ d')$ ならば $(a,\ b) + (c,\ d) \sim (a',\ b') + (c',\ d')$ が成り立つ。

（証明）　仮定より $ab' = a'b$，$cd' = c'd$。また $(a,\ b) + (c,\ d) = (ad + bc,\ bd)$，$(a',\ b') + (c',\ d') = (a'd' + b'c',\ b'd')$ より

$$\begin{aligned}
(a',\ b') + (c',\ d') &= (a'd' + b'c' + b'd') \\
&\sim (bda'd' + bda'c',\ bdb'd') \\
&= (ab'dd' + bd'b'c,\ bdb'd') \\
&= (b'd'(ad + bc),\ bdb'd') \\
&\sim (ad + bc,\ bd) \\
&= (a,\ b) + (c,\ d).
\end{aligned}$$

故に～は加法と両立する。□

定義11（加法）　$\frac{a}{b}$，$\frac{c}{d} \in \tilde{\mathbb{Q}}$ に対して $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ とする。

定理７．１は $\tilde{\mathbb{Q}}^+$ における加法の定義が *well defined* であることを示している。$\frac{0}{1}$ を０と表す。加法について次の性質が成り立つ。証明は省略する。

定理７．２　p，q，$r \in \tilde{\mathbb{Q}}^+$ に対し，次が成り立つ。

(1)　$(p + q) + r = p + (q + r)$，

(2)　$p + q = q + p$，

(3)　$p + 0 = p$．

加法の定義は見かけが複雑なようであるが，理にかなっている。しかし乗法は理由が面倒である。乗法については，線形代数的考え，即ち $\tilde{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}$ が $\tilde{\mathbb{Q}}^+$ に作用すると考えるのが最も自然であると思われる。Mという対象があったとき，「Mの b 分の a」というのは，Mを b 等分したうちの a 個を意味するが，こらはMに $(a,\ b)$ という $\tilde{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}$ の元が作用していると考えられる。Mの b 等分というのは，同じものが b 個寄ったときMと同じになるという意味だから，Mが $\tilde{\mathbb{Q}}^+$ の元だとした

とき，累加を $\tilde{\mathbb{N}}$ の元の積で表す必要がある。

定義12　$\tilde{\mathbb{Q}}^+ \times \tilde{\mathbb{N}} \to \tilde{\mathbb{Q}}^+$　$((q,m) \mapsto qm)$ を

$$qm = \begin{cases} q+q+\cdots+q & (m\text{個の}q \quad if\ m \neq 0) \\ 0 & (m=0) \end{cases}$$

とする。加法の定義を考慮すると $\frac{a}{b}\cdot m = \frac{am}{b}$ であることは容易に分る。次の定理も証明は省略する。

定理7．3　演算 $\tilde{\mathbb{Q}}^+ + \tilde{\mathbb{N}} \to \tilde{\mathbb{Q}}^+$ は次の性質をみたす。

(1)　$(q_1+q_2)\,m = q_1 + q_2 m$,

(2)　$q(m_1+m_2) = qm_1 + m_2$,

(3)　$(qm)\,n = q\,(mn)$,

(4)　$q\,1 = q$.

補題7．4　$q_1 m = q_2 m$　$(q_1,\ q_2 \in \tilde{\mathbb{Q}}^+,\ m \in \mathbb{N}) \Rightarrow q_1 = q_2$.

（証明）　$q_1 = \frac{a}{b}$，$q_2 = \frac{c}{d}$ とする。$q_1 m = q_2 m \Rightarrow \frac{am}{b} = \frac{cm}{d} \Rightarrow adm = bcm \Rightarrow ad = bc \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow q_1 = q_2$．よって証明された。□

定理7．5　$\forall q \in \tilde{\mathbb{Q}}^+$，$\forall m \in \mathbb{N}$ に対して，$xm = q$ をみたす $x \in \tilde{\mathbb{Q}}^+$ が唯一つ存在する。

（証明）　$q = \frac{a}{b}$ のとき，$\frac{a}{bm}\cdot m = \frac{am}{bm} = \frac{a}{b} = q$ なので，解は存在する。一意性は補題7．3より明らかである。□

定理7．5における解 x を<u>q の m 分の1</u>という。任意の $\frac{a}{b} \in \tilde{\mathbb{Q}}^+$ と $(c,\ d) \in \tilde{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}$ に対して，$\frac{a}{b}$ の d 分の1が存在するので，$\frac{a}{b}$ の d 分の c は，（$\frac{a}{b}$ の d 分の1）$c = \frac{ac}{bd}$ で与えられる。よって

$$\tilde{\mathbb{Q}}^+ \times (\tilde{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}) \to \tilde{\mathbb{Q}}^+ \qquad ((\tfrac{a}{b},\ (c,\ d)) \mapsto \tfrac{a}{b}\cdot(c,\ d) = \tfrac{ac}{bd})$$

が定義された。

補題7．6　$\frac{a}{b} \in \tilde{\mathbb{Q}}^+$，$(c,\ d) \sim (c',\ d')\ in \tilde{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}$ のとき $\frac{a}{b}\cdot(c,\ d) = \frac{a}{b}\cdot(c',\ d')$ が成り立つ。

（証明）　$\frac{ac}{bd} = \frac{ac'}{bd'}$ を示せばよい。$(c,\ d) \sim (c',\ d')$ より $cd' = c'd$．よって $(ac)(bd') = (ab)(cd') = (ab)(c'd) = (ac')(bd)$．故に $\frac{ac}{bd} = \frac{ac'}{bd'}$．□

補題7．5より次の定義が可能である。

定義13（乗法）$\frac{a}{b}$，$\frac{c}{d} \in \tilde{\mathbb{Q}}^+$ に対して $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ とする。

$\frac{1}{1}$ を1と表す。次の定理も証明は省略する。

定理７．７　$p, q, r \in \tilde{\mathbb{Q}}^+$ に対し，次が成り立つ。

(1)　$(p \cdot q)\, r = p\, (q \cdot r)$,

(2)　$p \cdot q = q \cdot p$,

(3)　$p \cdot 1 = p$,

(4)　$p\, (q + r) = pq + pr$.

定義14　$\eta_0 : \tilde{\mathbb{N}} \to \tilde{\mathbb{Q}}^+$ を $\eta_0(m) = \frac{m}{1}$ とする。

定理７．８　η_0 は次の性質をもつ。

(1)　η_0 は加法と乗法について順同型写像である。

(2)　η_0 は単射。

(3)　η_0 は $\tilde{\mathbb{Q}}^+$ における単位元。

(4)　$\tilde{\mathbb{Q}}^+$ の元は $\eta_0(m)\eta_0(n)^{-1}$ の形で書ける。

この定理により $\tilde{\mathbb{N}}$ は演算まで込めて $\tilde{\mathbb{Q}}^+$ の部分集合と考えることができる。

この節の最後に次のことに注意する。証明はやはり省略する。

定理７．９　$\langle \tilde{\mathbb{Q}}^+, \cdot \rangle$ は乗法アーベル群を成す。

８．$\tilde{\mathbb{Q}}^+$ における割り算について

$\tilde{\mathbb{N}}$ において，$ab = c$ という等式を考えるとき，a を求めることを等分除，b を求めることを包含除といった。$\tilde{\mathbb{Q}}^+$ において $ab = c$ を考えるとき，乗法の意味からすると，a はベクトルで b はスカラーとして考えていた。よって a と b との意味は全く異なっている。しかし，a も b も $\tilde{\mathbb{Q}}^+$ の一員であり，しかも乗法の交換法則が成り立つので，計算上は何の区別もなくなってしまう。しかし，式をたてるときには順序に意味がある。したがって，a や b を求める式をたてるときは，やはり，a を求める式は<u>等分除</u>，b を求める式は<u>包含除</u>というべきである。

９．有理数 $\mathbb{Q}$ の構成

定理７．８でみたように，$\tilde{\mathbb{Q}}^+$ では割り算が自由にできるので乗法に関しては $\tilde{\mathbb{Q}}^+$ より広げる必要はないのであるが，引き算を自由に行いたいという要請から $\tilde{\mathbb{Q}}^+$ をさらに広げる必要があるのである。また，負の値も現実的なものであるので，現実的にも $\tilde{\mathbb{Q}}^+$ の拡張は要請される。

中学校では（マイナス）＋（プラス）や（マイナス）×（マイナス）に現実的な意味を考えているが，私は代数的に閉じさせる（計算をしやすくする）ために負の数を導入する。この方法がベストだと言える自信はないが，内容的にいって無理だとも思わない。とにかく私の立場からすると，

現実的な意味は単なる解釈であり，定義とは異なることになる。でき上がったものに意味を与えて，それが本来の意味であるかのように説明するのは，教育的には必要かもしれないが，私には受け入れがたい。しかし，解釈は数学に取って重要なアイデアであり，解釈することは推奨すべきである。明確にすべきは，定義と解釈とは異なるということである。

前置はここまでにして，正の有理数を構成することにする。まず $\tilde{\mathbb{Q}}^+$ が全順序集合となることを示す。

定義15　$\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d} \in \tilde{\mathbb{Q}}^+$のとき，$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \Leftrightarrow ab > bc$ とする。

補題９．１　上の定義は *well defined* である。

（証明）　$(a,\ b) \sim (a',\ b')$, $(c,\ d) \sim (c',\ d')$ *in* $\tilde{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}$ とする。$ad > bc \Leftrightarrow a'd' > b'd'$ であることを示せばよい。今$ad > bc$であるとする。定理４．４より$b'd'ad > b'd'bc \Rightarrow a'bdd' > b\ b'dd' \Rightarrow$（$bd$）（$a'd'$）$>$（$bd$）（$b'c'$）$\Rightarrow a'd' > b'c'$（定理４．４）。逆も同様である。□

補題９．２　$\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f} \in \tilde{\mathbb{Q}}^+$, $\frac{c}{d} < \frac{e}{f}$ ならば$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} < \frac{a}{b} + \frac{e}{f}$ が成り立つ。

（証明）　$\frac{ab+bc}{bd} < \frac{af+be}{bf}$ を示せばよいのだから $(ad + bc)bf <$ $(af + be)bd$ を示せばよい。$cf < de$ なので，$adbf + bcbf < adbf + b^2de =$ $(af + be)bd$。□

定理９．３　$\frac{a}{b} \geq \frac{c}{d}$ のとき $\frac{c}{d} + x = \frac{a}{b}$ の解$x \in \tilde{\mathbb{Q}}^+$ が唯一つ存在する。

（証明）　$ad \geq bc$より$bc + y = \frac{a}{b}$ をみたす$y \in \tilde{\mathbb{N}}$ が存在する（定理３．６）。よって$\frac{c}{d} + \frac{y}{bd} = \frac{a}{b}$ なので，$x = \frac{y}{bd}$ とおけばよい。一意性は補題９．２より明らか。□

補題９．２より定理９．３の逆が言える。

定理９．４　$\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d} \in \tilde{\mathbb{Q}}^+$ のとき，$\frac{c}{d} + x = \frac{a}{b}$ の解が $\tilde{\mathbb{Q}}^+$ の中に存在するならば，$\frac{a}{b} \geq \frac{c}{d}$ である。

よって一定の条件がなければ，方程式の解は $\tilde{\mathbb{Q}}^+$ の中に存在しない。

定義16　$(a,\ b)$, $(c,\ d) \in \tilde{\mathbb{Q}}^+ \times \tilde{\mathbb{Q}}^+$ のとき $(a,\ b) \sim (c,\ d) \Leftrightarrow a + d = b + c$ とする。

次の定理の証明は省略する。

定理９．５　$\sim$ は $\tilde{\mathbb{Q}}^+ \times \tilde{\mathbb{Q}}^+$ における同値関係である。

定義17　$\mathbb{Q} = \tilde{\mathbb{Q}}^+ \times \tilde{\mathbb{Q}}^+ / \sim$ とおき，$\mathbb{Q}$の元を有理数という。

次に $\mathbb{Q}$ における加法と乗法を定義することを考える。

定義18 $(a,\ b),\ (c,\ d) \in \tilde{\mathrm{Q}}^+ \times \tilde{\mathrm{Q}}^+$ のとき

(1) $(a,\ b) + (c,\ d) = (a+c,\ b+d)$

(2) $(a,\ b) \cdot (c,\ d) = (ac+bd,\ ad+bc)$ とする。

次の定理も証明は省略する。

定理9.6 $\langle \tilde{\mathrm{Q}}^+ \times \tilde{\mathrm{Q}}^+, +, \cdot \rangle$ は可換環を成す。

補題9.7 $\tilde{\mathrm{Q}}^+ \times \tilde{\mathrm{Q}}^+$ における＋と・は同値関係～と両立する。

（証明） 乗法が～と両立することをのみ証明する。$(a,\ b) \sim (a',\ b'),\ (c,\ d) \sim (c',\ d')$ とする。

$$(a,\ b)(c,\ d) = (ac+bd,\ ad+bc),$$

$$(a',\ b')(c',\ d') = (a'c'+b'd',\ a'd'+b'd'),$$

$$\begin{aligned}&(ac+bd)+(a'd'+b'd')+(b'c+a'd)+(a'c+b'd)\\&=(a+b')c+(a'+b)d+a'(c+d')+b'(c'+d)\\&=(a+b')(c+d)+(a'+b')(c+d),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(ad+bc)+(a'c'+b'd')+(b'c+a'd)(a'c+b'd)\\&=(a+b')d+(a'+b)c+a'(c'+d)+b'(d'+c)\\&=(a+b')(c+d)+(a'+b')(c+d')\end{aligned}$$

故に
$$\begin{aligned}&(ac+bd)+(a'd'+b'd')+(b'c+a'd)+(a'c+b'd)\\&=(ad+bc)+(a'c'+b'd')+(b'c+a'd)+(a'c+b'd).\end{aligned}$$

従って簡約律より $(ac+bd)+(a'd'+b'd') = (ad+bc)+(a'c'+b'd')$ が成り立ち，$(a,\ b)(c,\ d) \sim (a',\ b')(c',\ d')$ が成り立つ。□

補題9.8 $(a,\ b) \in \tilde{\mathrm{Q}}^+ \times \tilde{\mathrm{Q}}^+$ とし，$[a,\ b]$ を $(a,\ b)$ の同値類とする。また0を $\langle \tilde{\mathrm{Q}}^+, + \rangle$ の単位元とする。このとき $[a,\ b] = 0 \leftrightarrow a = b$ である。

（証明） $[0, 0]$ が加法単位元であることは明らかであり，$(a,\ b) \sim (0, 0) \leftrightarrow a = b$ である。□

補題9.7より Q において加法（＋）と乗法（・）が定義され，次が言える。

定理9.9 $\langle \tilde{\mathrm{Q}}^+, + \cdot \rangle$ は体を成す。

（証明） 定理9.6より可換環であることは明らかである。$[a,\ b] \neq 0$ とする。補題9.8より $a \neq b$ なので，$a > b$ なら $a = b + x$ として，$[a,\ b] = [b+x,\ b] = [x, 0]$ と書けるので，$[x, 0][x^{-1}, 0] = [1,\ 0]$ は Q の乗法単位元である。$a < b$ のときも同様である。よって Q は体である。□

定義19　$\eta : \tilde{\mathbb{Q}}^{+} \to \mathbb{Q}$ を $\eta(a) = [a, 0]$ とする。

次の定理も証明は省略する。

定理9.10　$\eta : \tilde{\mathbb{Q}}^{+} \to \mathbb{Q}$ は次の性質をもつ。

(1)　η は加法と乗法に関して順同型写像である。

(2)　η は単射。

(3)　$\mathbb{Q}$ の任意の元は $\eta(a) - \eta(b)$ と書ける。

(4)　$\mathbb{Q} = \{\eta(a) \mid a \in \tilde{\mathbb{Q}}^{+}\} \cup \{-\eta(b) \mid b \in \tilde{\mathbb{Q}}^{+}\}$ が成り立つ。

この定理により $\eta(a)$ は a で置き換えて，$\tilde{\mathbb{Q}}^{+}$ は演算を込めて $\mathbb{Q}$ の部分集合と考えることができる。

定義20　$p, q \in \mathbb{Q}$ のとき，$p > q \Leftrightarrow p-q \in \tilde{\mathbb{Q}}^{+}$ とする。

定理9.11　$\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$ は全順序集合である。

（証明）　$p, q \in \mathbb{Q}$ とする。定理9.10より $p-q \in \tilde{\mathbb{Q}}^{+}$ または $q-p \in \tilde{\mathbb{Q}}^{+}$ が成立つので，p と q は比較可能である。次に $p < q$, $q < r$, とする。$\tilde{\mathbb{Q}}^{+}$ は加法で閉じているので $(r-q) + (q-p) \in \tilde{\mathbb{Q}}^{+}$. 故に $r-p \in \tilde{\mathbb{Q}}^{+}$，即ち $p < r$ である。よって $\mathbb{Q}$ は全順序集合である。□

以上で位相的な性質を除いて，有理数の性質を自然数の公理から導くことが出来た。

参 考 文 献

[1]　松坂　和夫：集合・位相入門（岩波書店，1968）.

[2]　S. Lang : Algebraic Structures (Addison-Wesley, 1967).