群馬大学教育学部紀要　自然科学編　第52巻　9－15頁　2004

連続辺のヘロン三角形について

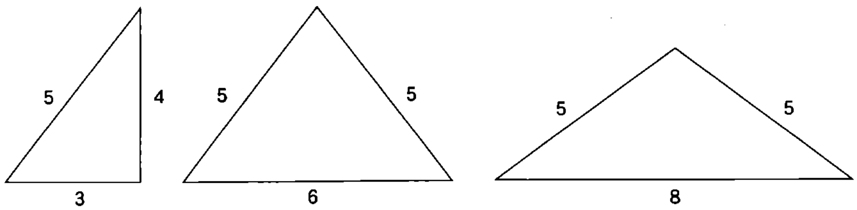
村　崎　武　明
群馬大学教育学部数学教室
(2003年9月5日受理)

On the Heron Triple (n＋1, n, n-1)

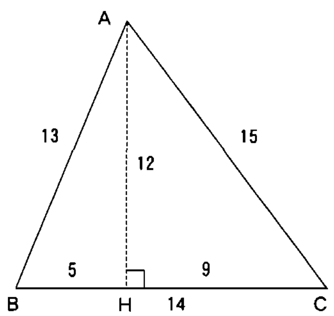
Takeaki MURASAKI
Department of Mathematics, Faculty of Education　Gunma University
(Accepted September 5, 2003)

《Ⅰ》はじめに

三辺の長さが整数値 a、b、c で与えられる三角形（a, b, c）を整数三角形といい、そのうちでも特に、面積が整数値になるものをヘロン三角形と呼ぶ。例えば、ピュタゴラス三角形（直角の整数三角形）は明らかにヘロン三角形であるが、鋭角や鈍角のものも存在する。それは次の図を見れば分かる。(正三角形（1, 1, 1）はヘロン三角形ではない)



特に興味深い例として、(15, 14, 13) というヘロン三角形がある。これは、辺14への高さが12であって、二つの直角三角形（13, 12, 5)と(15, 12, 9) を張り合せたものとして得られる。



このようなものは他にもあるのだろうか？　すなわち、本稿の主題は、

連続する三辺を持つようなヘロン三角形（$n+1$, n, $n-1$）を決定することである。

《II》ヘロン三角形の周長

整数三角形（a, b, c）の面積 S は有理数または無理数であるが、有理数になる時には、実は整数であることが分かる。即ち、次のことが言える。

> 定理１　整数三角形（a, b, c）の面積 S が有理数である時、
> （１）　S は整数である。
> （２）　周長（$a+b+c$）は偶数である。

証）　ヘロンの公式により、

$$(4S)^2=(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$$
$$=2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4)$$

となる。この右辺は有理数$(4S)$の平方であって、しかも整数値であるから、整数 N の平方である。即ち、

$$N^2+(a^4+b^4+c^4)=2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$$

となる。

（２）　周長（$a+b+c$）が奇数と仮定する。この時、明らかに

$(a+b+c)$、$(-a+b+c)$、$(a-b+c)$、$(a+b-c)$ はいずれも奇数

となるから、N は奇数である。また、a、b、c の一つ或は三つが奇数となる。

（ア）　a、b が偶数で、c が奇数の場合

$$N^2+(a^4+b^4+c^4)\equiv 1+(0+0+1)\equiv 2 \pmod 4$$
$$2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\equiv 0 \pmod 4$$

これは不可である。

（イ）　a、b、c が全て奇数の場合

$$N^2+(a^4+b^4+c^4)\equiv 1+(1+1+1)\equiv 0 \pmod 4$$
$$2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\equiv 2(1+1+1)\equiv 2 \pmod 4$$

これも不可である。

従って、周長（$a+b+c$）は偶数である。

（１）（２）により、

$(a+b+c)$、$(-a+b+c)$、$(a-b+c)$、$(a+b-c)$ はいづれも偶数

となるから、その積 N^2 は 2^4 の倍数である。即ち、N は４で割り切れるから、

$S=¼\,N$ は整数

となる。■

この定理1によれば、"整数三角形（6，5，4）はヘロン三角形ではない"と言える。しかし、「周長が偶数」ということは、ヘロン三角形になるための十分条件ではない。例えば、整数三角形（7，6，5）の面積は無理数なのである。

《III》原始的ヘロン三角形

> 定理2　ヘロン三角形の三辺の任意の公約数 d によって、$(1/d)$ 倍相似縮小した三角形もヘロン三角形である。

証）　ヘロン三角形 $\mathrm{T}=(a,\ b,\ c)$ の三辺の公約数を d とし、整数三角形 $\mathrm{T}_1=(a/d,\ b/d,\ c/d)$ を作る。T の面積 S は整数であるから、T_1の面積 $S_1=(1/d)^2S$ は有理数である。定理1によれば S_1は整数となり、T_1 もヘロン三角形である。■

㊟　この定理は整数辺の四角形においても成立しそうに思えるが、実はそうではない。例えば、各辺が2の菱形で（内角を適当に取って）面積2のものを作る。これを（1/2）倍相似縮小した菱形を考えると、（各辺が1の菱形であるが）その面積は（1/2）となって、整数値にはならないのである。

この定理2によれば、ヘロン三角形の三辺の最大公約数 d によってそれを $(1/d)$ 倍相似縮小して、「三辺が互いに素となるヘロン三角形」が得られる。これを、「原始的なヘロン三角形」と呼ぶ。任意のヘロン三角形は原始的なものの（整数倍の）相似拡大として得られるから、調べるべきは原始的なヘロン三角形である、と言える。そして、その周長も偶数であるから、その三辺 a、b、c は

一つの偶数辺と二つの奇数辺………☆

ということになる。

> 定理3　ヘロン三角形の面積は6の倍数である。

証）　原始的な場合を調べれば十分である。その周長は偶数であるから、半周長 s は整数となる。従って、☆により

$s-a$、$s-b$、$s-c$ のいずれかは偶数

と言える。従って、

$S^2=s(s-a)(s-b)(s-c)$　は偶数

であり、しかも面積 S は整数値であるから、S は偶数である。

次に、

$N^2=(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$ が3の倍数

となることを示そう。(従って整数 $S=\frac{1}{4}N$ も3の倍数となる)

$(-a+b+c)$、$(a-b+c)$、$(a+b-c)$ のいずれもが3の倍数ではない、と仮定する。

(ア)　$(-a+b+c)\equiv(a-b+c)\equiv(a+b-c)\equiv 1$ または2 (mod 3) の場合

この三つを加えれば、

$$(a+b+c)\equiv 0 \pmod 3$$

を得るから、N^2は3の倍数である。

(イ)　$(-a+b+c)$、$(a-b+c)$、$(a+b-c)$ の二つが1 (mod 3) で、残り一つが2 (mod 3) となる場合

この三つを加えれば、

$$(a+b+c)\equiv 1 \pmod 3$$

となるから、

$$(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)\equiv 2 \pmod 3$$

を得る。しかし、左辺は完全平方数 N^2であるから、1 (mod 3) となり、これは不可である。

(ウ)　$(-a+b+c)$、$(a-b+c)$、$(a+b-c)$ の二つが2 (mod 3) で、残り一つが1 (mod 3) となる場合

この三つを加えて、

$$(a+b+c)\equiv 2 \pmod 3$$

となるから、

$$(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)\equiv 2 \pmod 3$$

を得るが、これも(イ)と同様に不可である。　■

㊟　面積が6や12になるヘロン三角形は存在する。(《Ⅰ》の例)　しかし、18になるものは無い。従って、「ヘロン三角形の面積値になるような6の倍数を確定する」というような問題も設定出来る。もちろん最終的には、ピュタゴラス三角形のように「ヘロン三角形のパラメーター表示」が求められれば喜ばしいことではあるが、これらは難しい問題である。

例. 連続辺のヘロン三角形 $(n+1,\ n,\ n-1)$ $(\neq(5,\ 4,\ 3))$ は、二つのピュタゴラス三角形の張り合せとして得られる。

∵)　このヘロン三角形は、明らかに原始的である。従って☆によって、

n は偶数

となるので、$n=2m$ と置く。この△ABCを

$$AB=2m-1、BC=2m、CA=2m+1$$

とする。この半周長 $s=3m$ によって、ヘロンの公式から

$$S=m\sqrt{3\ (m^2-1)}$$

を得る。ここで、

$$S/m=\sqrt{3\ (m^2-1)}$$

は有理数であるが、$3\ (m^2-1)$ が整数であるから、S/m は整数となる。

A から辺 BC へ下した垂線の足を H とすると（△ ABC は鋭角三角形であるから、H は辺 BC 上にある）、

$$S=\tfrac{1}{2}\,\mathrm{BC}\cdot\mathrm{AH}=\mathrm{m}\cdot\mathrm{AH} \qquad \therefore\quad \mathrm{AH}=S/m \text{ は整数値}$$

そして、

$$\mathrm{BH}^2=\mathrm{AB}^2-\mathrm{AH}^2=(2m-1)^2-3(m^2-1)=(m-2)^2$$

となるから、このヘロン三角形△ ABC は二つのピュタゴラス三角形

$$\triangle\,\mathrm{ABH}=(2m-1,\ S/m,\ m-2)、\triangle\,\mathrm{ACH}=(2m+1,\ S/m,\ m+2)$$

の張り合せである。

㊟ （ピュタゴラス三角形以外の）ヘロン三角形が二つのピュタゴラス三角形の張り合せや取り除きとして得られるとは限らない。例えば、ヘロン三角形（39, 35, 10）はどの辺への垂線の長さも整数にはならないのである。

《Ⅳ》連続辺のヘロン三角形

この節では、三辺が連続する三整数となるようなヘロン三角形のすべてを見出す方法を与えることにしよう。

前節でも見たように、このようなヘロン三角形 T は

$$\mathrm{T}=(n+1,\ n,\ n-1)=(2m+1,\ 2m,\ 2m-1)$$

$$\text{面積 } S=m\sqrt{3\ (m^2-1)}$$

となるから、S が整数値であることより、$3\ (m^2-1)$ は完全平方数になる。即ち、

$$3\ (m^2-1)=K^2$$

となる。この整数 K は素因数 3 を含んでいるから、両辺からそれを簡約すれば、

$$m^2-1=3k^2 \quad \cdots\cdots\cdots \ ◎$$

と表せることになる。言い換えれば、このようなヘロン三角形 T を見出すには、

「$m^2-1=3k^2$ となる整数 k が存在する」ような整数 m

を求めれば良い、

ということになる。即ち、この問題は

Pell 方程式：$x^2-3y^2=1$　を解くこと

に帰着される。そして、Pell 方程式の解法は次のように既知である。

D は平方因子を持たない正整数として、

不定方程式：$x^2-Dy^2=1$………※

の最小正整数解を（a_1, b_1）とする時、※の一般解（a_n, b_n）は次の漸化式で与えられる。

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & Db_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

我々の問題は $D=3$ の場合であり、$x^2-3y^2=1$ の最小正整数解は（2, 1）である。従って、その全ての解は

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}、\begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ 15 \end{pmatrix}、$$

$$\begin{pmatrix} a_4 \\ b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 26 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 97 \\ 56 \end{pmatrix}、\begin{pmatrix} a_5 \\ b_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 97 \\ 56 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 362 \\ 209 \end{pmatrix}、$$

$$\begin{pmatrix} a_6 \\ b_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 362 \\ 209 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1351 \\ 780 \end{pmatrix}、\cdots\cdots$$

のように順次求めて行くことが出来る。即ち、連続辺のヘロン三角形は

m＝2、7、26、97、362、1351、………

となるものであり、その面積は $S=3mk=3a_n\,b_n$ であるから、

(5, 4, 3) ………$S=6$

(15, 14, 13) ………$S=84$

(53, 52, 51) ………$S=1170$

(195, 194, 193) ………$S=16296$

(725, 724, 723) ………$S=226974$

(2703, 2702, 2701) ………$S=3161340$

………

のように、その全てを見出して行くことが出来る。

《V》おわりに

整数三角形の話題は図形的な装いをしていることから、親しみ易く感じられるせいか、講義で取り上げた時も、受講生の関心を引くものであった。そして、本質的には初等整数論の題材であるし、その知識や技法を展開する場面を豊富に提供するものとして、それへの導入や動機付けには格好のものと思われる。本稿の内容も、前半部分は高校生の自由課題には利用出来るものであろうし、後半の Pell 方程式については、将来の勉学への意欲を引き出す手掛かりにし得るのではないだろうか。とにかく、整数三角形については、易しいものから難しいものまで様々な設問や疑問が数多く提示出来るので、高校生や大学生の興味・関心を呼び起こす適切な教材になり得るものとして、更なる開発が望まれる処である。

参考文献

1）ピュタゴラスの三角形　　シェルピンスキー著（銀林浩訳）（東京図書　1993年）

2）初等整数論講義　　高木貞治著（共立出版　1974年）

3）$\sqrt{2}$の数学　　一松　信著（海鳴社　1990年）

4）熊野充博：整三角形と格子点　　数学セミナー（日本評論社）第29巻　第2号　通巻　338号　92-93頁（1990年）

5）村崎武明：倍角の整数三角形について　　群馬大学教育学部紀要　自然科学編　第49巻　13-20頁（2001年）

6）村崎武明：整数三角形の内角について　　群馬大学教育学部紀要　自然科学編　第50巻　53-78頁（2002年）