Mathematicaによるメービウスの帯とクラインの壺の描画について

大　竹　公一郎
群馬大学教育学部数学教室
(2003年9月5日受理)

On Plotting of Möbius Strip and Klein Bottle by Mathematica

Koichiro OHTAKE
Department of Mathematics, Faculty of Education,
Gunma University, Maebashi, Gunma 371-8510, Japan
(Accepted September 5, 2003)

Abstract

In this note we will explain an idea to plot Möbius strip. This idea is available to plot Klein bottle. We also show Mathematica programs to plot these figures.

はじめに

メービウスの帯は長方形の一組の対辺に適当な同値関係を入れて、その関係で割った商空間であり、3次元空間の中で実現されるものである。元もと長方形を3次元空間の中におけば、一組の対辺をねじってつないだ図形がメービウスの帯である。またクラインの壺は、円柱の上辺と下辺に適当な同値関係を入れて、その関係で割った商空間のことである。これは4次元空間の中で実現できるものである。メービウスの帯から類推すれば、クラインの壺は、元もと円柱を4次元空間の中におけば、上辺と下辺をねじってつないだものと大ざっぱに考えることができる。我々がよく目にするクラインの壺は、3次元空間の中にある円柱の上辺と下辺をねじってつないだ図形である。それを4次元空間の中に自然に埋め込んでやればいわゆるクラインの壺になっているのでる。

学生の卒論指導がMathematicaによるグラフィクスがテーマで、色々な図形が出てくるのであるが、ゼミを行っている中で私はふとメービウスの帯の描画に興味を持った。そしてメービウスの帯の定義をそのままプログラムすれば図形が描かれることが分かった。それだけではたいした意味は

ないが、クラインの壺についても同じような考えで描画できたのでプログラムを示すことにした。

もう少し具体的に述べると、メービウスの帯は有向線分を空間の中で、始点が終点に、終点が始点に重なるように移動させたときの軌跡として表現したものである。同様にクラインの壺は、向きをもった円を空間の中で、向きが反対となって重なるように移動させて出来た軌跡として表現してやればよい。後は Mathematica でプログラムを組んで 3 次元区間に投影したものを表現すればよいわけである。

1 メービウスの帯

プログラム 1 は 2 点 (0.7,0,0), (1.3,0,0) を結ぶ線分を、中点を通る y 軸に平行な直線に関して半回転させる間に、z 軸に関して 1 回転させるプログラムである。また図 1 は実行結果である。

プログラム 1

```
matrix1={{Cos[k Pi/10], 0, -Sin[k Pi/10]},
    {0, 1, 0}, Sin[k Pi/10], 0, Cos[k Pi/10]}};
matrix2={{Cos[k Pi/5], -Sin[k Pi/5], 0},
    {Sin[k Pi/5], Cos[k Pi/5], 0}, {0, 0, 1}};
{x1, y1, z1}=matrix2.(matrix1.{-.3, 0, 0}+
    {1, 0, 0});
{x2, y2, z2}=matrix2.(matrix1.{.3, 0, 0}+
    {1, 0, 0});
Show[Table[Graphics3D[Line[{{x1, y1, z1}, {x2, y2, z2}}], Boxed —>False], {k, 0, 10, .08}]]
```

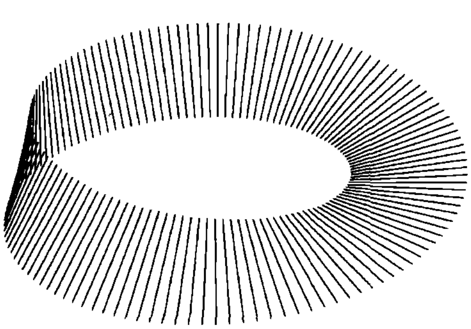

図 1

次のプログラムは、線分とその軌跡を点の軌跡として表示するものである。また図 2 はその実行結果である。

プログラム 2

```
matrix1={{Cos[t/2], 0, -Sin[t/2]}, {0, 1, 0},
    {Sin[t/2], 0, Cos[t/2]}};
matrix2={{Cos[t], -Sin[t], 0},
    {Sin[t], Cos[t], 0}, {0, 0, 1}};
{x, y, z}=matrix2.(matrix1.{0, 0, u}+{1, 0, 0});
ParametricPlot3D[{x, y, z}, {t, 0, 2π}, {u, -.3, .3},
    PlotPoints —>25, PlotRange —>
    {{-1.3, 1.3}, {-1.3, 1.3}, {-.3, .3}}, Axes —>
```

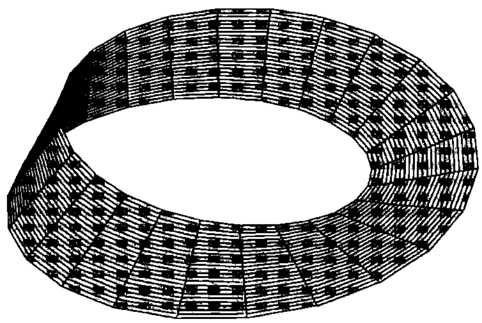

図 2

```
False, Boxed —> False, ViewPoint —>{-3, 2, 3}]
```

次のプログラムは、メービウスの帯の表面を球が運動するアニメーションである。

プログラム3

```
matrix1={{Cos[φ/2], 0, -Sin[φ/2]}, {0, 1, 0}, {Sin[φ/2], 0, Cos[φ/2]}};
matrix2={{Cos[φ], -Sin[φ], 0}, {Sin[φ], Cos[φ], 0}, {0, 0, 1}};
matrix3={{Cos[k π/10], 0, -Sin[k π/10]}, {0, 1, 0}, {Sin[k π/10], 0, Cos[k π/10]}};
matrix4={{Cos[k π/5], -Sin[k π/5], 0}, {Sin[k π/5], Cos[k π/5], 0}, {0, 0, 1}};
{x1, y1, z1}=matrix2.(matrix1.{0, 0, .6/πθ -.3}+{1, 0, 0});
r=.1;
{a, b, c}=matrix4.(matrix3.{r, 0, 0}+{1, 0, 0});
{x, y, z}={r Sin[θ] Cos[φ]+a, r Sin[θ] Sin[φ]+b, r Cos[θ]+c};
ball[k-]: =ParametricPlot3D[{{x1, y1, z1}, {x, y, z}}, {θ, 0, π}, {φ, 0, 2π}, Axes —> False,
    Boxed —> False, ViewPoint —>{-3, 2, 3}, PlotPoints —> 30, PlotRange —>{{-1.3, 1.3},
    {-1.3, 1.3}, {-.3, .3}}];
Table[ball[k], {k, 0, 20, .5}]
```

2 クラインの壺

2.1 3次元的イメージのクラインの壺

次のプログラムは円が空間内で大きさを変えながら移動して、裏がえって元に戻ることを表したアニメーションである。また図3は、実行して得られた図のうち円の軌跡の部分である。

プログラム4

```
r=(20+3π)/(32π^2(4+π))θ^3-(80+80π+9π^2)/
    (32π^2(4+π))θ^2+(2+π)(28+3π)/(16π(4+π))θ+1;
rot1={{Cos[θ-3], 0, -Sin[θ-3]}, {0, 1, 0}, {Sin[θ-3], 0,
    Cos[θ-3]}};
rot2={{Cos[θ-3], 0, Sin[θ-3]}, {0, 1, 0}, {-Sin[θ-3], 0,
    Cos[θ-3]}};
{x1, y1, z1}={r Cos[φ], r Sin[φ], θ};
{x2, y2, z2}=rot1.{r Cos[φ]+1, r Sin[φ], 0+{-1, 0, 3};
{x3, y3, z3}=rot2.{r Cos[φ]+1, r Sin[φ], 0+{-1, 0, 1};
{x4, y4, z4}={r Cos[φ], r Sin[φ], 4+2π-θ};
```

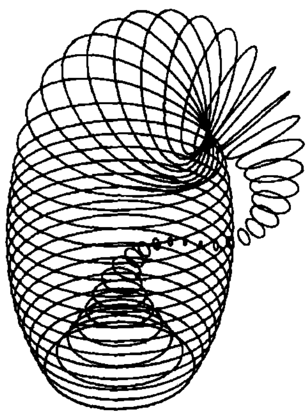

図3

```
x=If[0<=θ<=3, x1, If[3<θ<=3+3π/2, x2, If[3+3π/2<θ<=3+2π, x3, x4]]];
y=If[0<=θ<=3, y1, If[3<θ<=3+3π/2, y2, If[3+3π/2<θ<=3+2π, y3, y4]]];
z=If[0<=θ<=3, z1, If[3<θ<=3+3π/2, z2, If[3+3π/2<θ<=3+2π, z3, z4]]];
Show[Table[ParametricPlot3D[{x, y, z}, RGBColor[0, 0, 0], {ϕ, 0, 2π}, PlotPoints ->35,
    ViewPoint ->{-1, 2, 1}, Boxed -> False, Axes -> False, PlotRange ->{{-3, 3}, {-3, 3},
    {0, 6}}], {θ, 0, 10.28, .2056}]]
```

次のプログラムは、プログラム4をプロットするように改良したものであるが、できあがると内部が見えなくなるので一部外側をカットしてある。アニメーションで見るとわかりやすくなる。図4は実行して出来た図を並べたものである。

プログラム5

```
r=(20+3π)/(32π^2(4+π))θ^3-(80+80π+9π^2)/(32π^2(4+π))θ^2+(2+π)(28+3π)/
    (16π(4+π))θ+1;
rot1={{Cos[θ-3], 0, -Sin[θ-3]}, {0, 1, 0}, {Sin[θ-3], 0, Cos[θ-3]}};
rot2={{Cos[θ-3], 0, Sin[θ-3]}, {0, 1, 0}, {-Sin[θ-3], 0, Cos[θ-3]}};
{x1, y1, z1}={r Cos[ϕ], r Sin[ϕ], θ};
{x2, y2, z2}=rot1.{r Cos[ϕ]+1, r Sin[ϕ], 0}+{-1, 0, 3};
{x3, y3, z3}=rot2.{r Cos[ϕ]+1, r Sin[ϕ], 0}+{-1, 0, 1};
{x4, y4, z4}={r Cos[ϕ], r Sin[ϕ], 4+2π-θ};
```

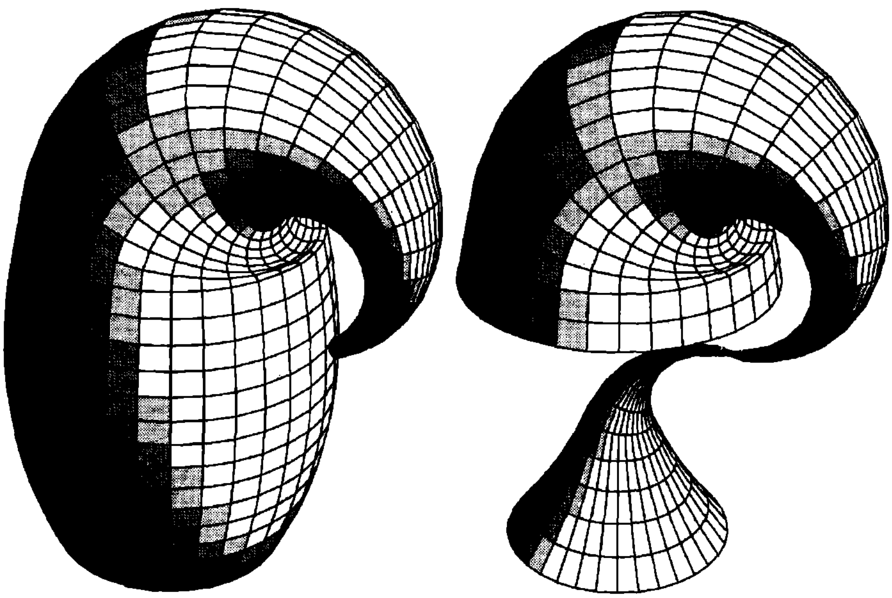

図4

```
x=If[0<=θ<=3, x1, If[3<θ<=3+3π/2, x2, If[3+3π/2<θ<=3+2π, x3, x4]]];
y=If[0<=θ<=3, y1, If[3<θ<=3+3π/2, y2, If[3+3π/2<θ<=3+2π, y3, y4]]];
z=If[0<=θ<=3, z1, If[3<θ<=3+3π/2, z2, If[3+3π/2<θ<=3+2π, z3, z4]]];
ParametricPlot3D[{x, y, z}, {θ, 0, 3+4π/3}, {φ, 0, 2π}, PlotPoints ->35, ViewPoint ->{-1, 2,
    1}, Boxed -> False, Axes -> False, PlotRange ->{{-3, 3}, {-3, 3}, {0, 6}}];
ParametricPlot3D[{x, y, z}, {θ, 2.5, 4+2π}, {φ, 0, 2π}, PlotPoints ->35, ViewPoint ->{-1, 2, 1},
    Boxed -> False, Axes -> False, PlotRange ->{{-3, 3}, {-3, 3}, {0, 6}}];
ParametricPlot3D[{x, y, z}, {θ, 0, 4+2π}, {φ, 0, 2π}, PlotPoints ->35, ViewPoint ->{-1, 2, 1},
    Boxed -> False, Axes -> False, PlotRange ->{{-3, 3}, {-3, 3}, {0, 6}}]
```

2.2 4次元空間で実現したクラインの壺の3次元への投影

4次元空間で円を移動させて、軌跡が途中で重ならず、裏がえって元に戻ったものがクラインの壺である。3次元空間においては、直線を軸とした回転が考えられるが、4次元空間においてはそういうものは考えられない。しかし類推はできる。次のプログラムにおいて、M1とM2は行列であるが、M1においては *xyzu* 空間において *zu* 軸に関する回転のようなものを表す。またM2はxz軸に関する回転のようなものを表す。プログラムは円がM2で1回転する間に一方のM1で半回転するものである。このままでは表示できないので、*xzu* 空間に投影して表している。図5は実行結果であるが、同じ図形を見る角度を変えたものである。

プログラム6

```
M1={{Cos[θ], -Sin[θ], 0, 0}, {Sin[θ], Cos[θ], 0, 0}, {0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 1}};
M2={{1, 0, 0, 0}, {0, Cos[θ/2], 0, -Sin[θ/2]}, {0, 0, 1, 0}, {0, Sin[θ/2], 0, Cos[θ/2]}};
p={{1, 0, 0, 0}, {1, 0, 1, 1}, {0, -1, 1, 1}, {0, 1, 0, 1}};
rot={{Cos[Pi/3], -Sin[Pi/3], 0, 0}, {Sin[Pi/3], Cos[Pi/3], 0, 0}, {0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 1}};
r=.3;
{x, y, z, u}=M2. M1.{r Cos[φ]+1, r Sin[φ], 0, 0};
Table[ParametricPlot3D[{x, y, u}, {θ, 0, 2 Pi}, {φ, 0, 2 Pi}, PlotPoints ->{30, 30}, Axes ->
    False, Boxed -> False, PlotRange ->{{-1.5, 1.5}, {-1.5, 1.5}, {-1.5, 1.5}}, ViewPoint ->
    {2 Cos[k Pi/5], 2 Sin[k Pi/5], 1}], {k, 0, 9}]
```

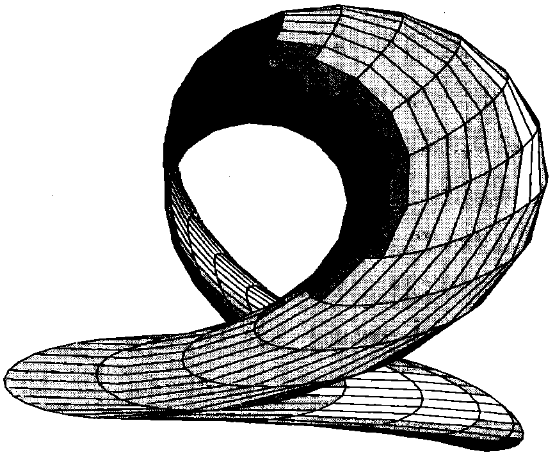

図5－1

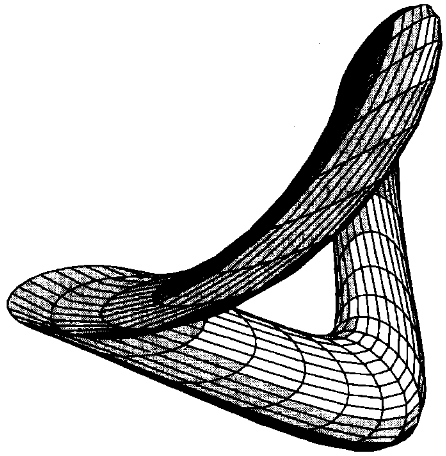

図5－2

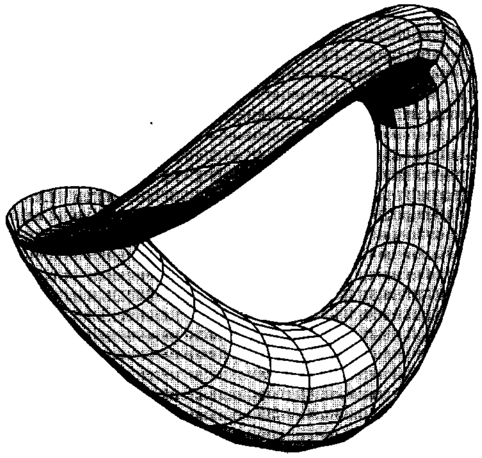

図5－3

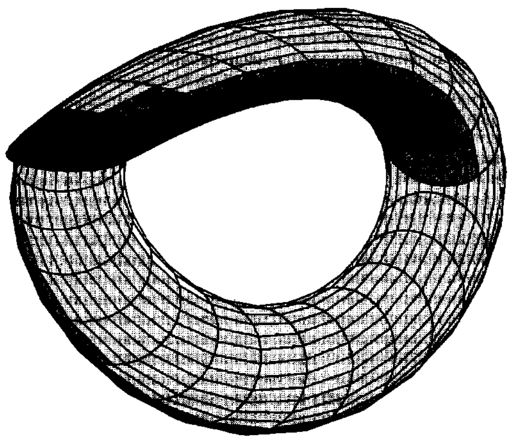

図5－4

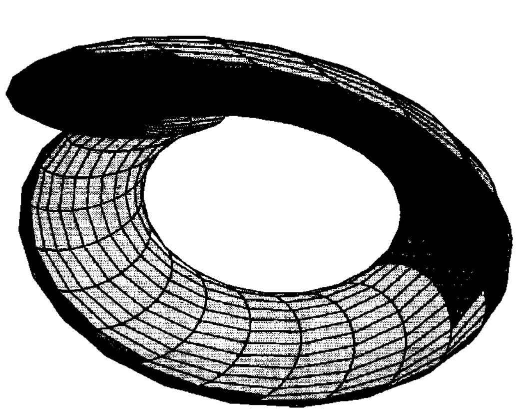

図5－5

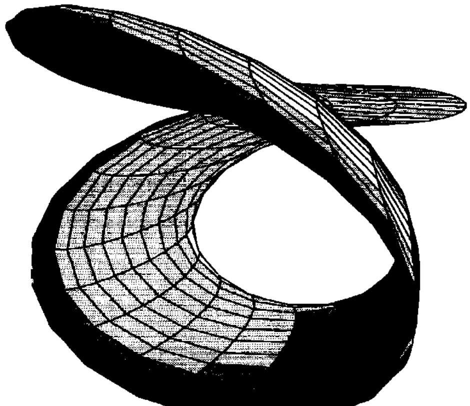

図5－6

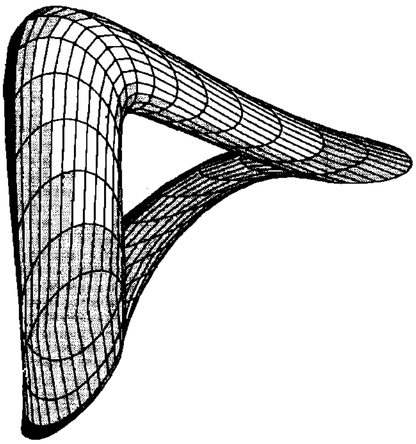

図5-7

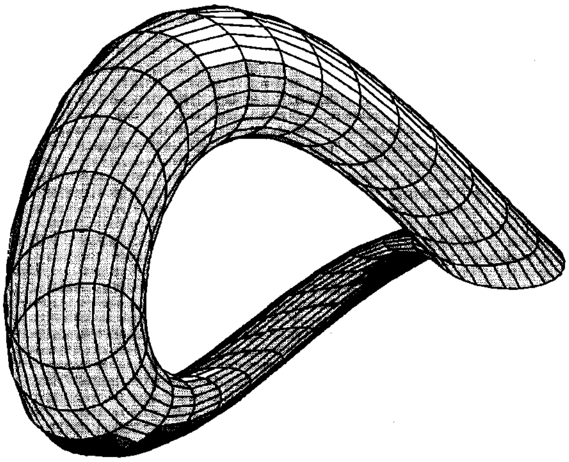

図5-8

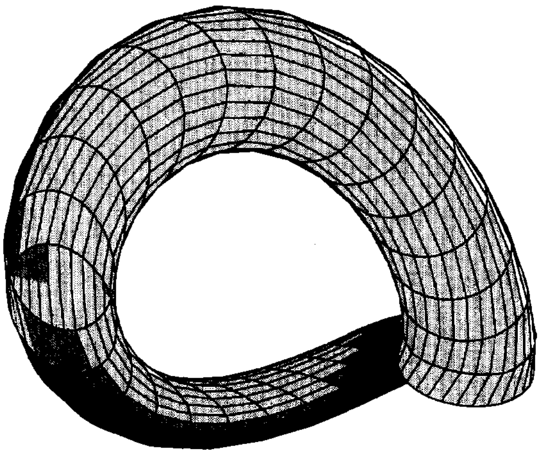

図5-9

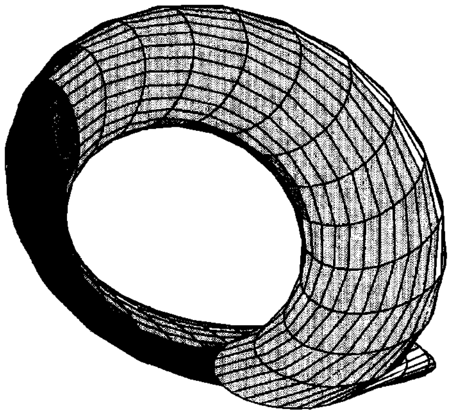

図5-10

参考文献

1) スティーブン ウルフラム, **Mathematica** a System for Doing Mathematics by Computer, アジソン ウェスレイ (日本語版), 1992

2) 大竹公一郎 「Mathematica 入門」(講義資料), 改訂中